ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 59, No. 2, 1987

SUR LES NORMES NORMALES AU SENS DE BENILAN–CRANDALL ET PAZY

BY

MARIE-THÉRÈSE LACROIX

Université de Besançon et C.N.R.S., Equipe de Mathématiques, U.A. n° 741, Faculté des Sciences, 25030 Besançon Cedex, France

ABSTRACT

We compare order relation on $L^1(\Omega)+L^\infty(\Omega)$ introduced by Ph. Bénilan, M. G. Crandall and A. Pazy [1], and this induced by the K function of interpolation theory [5]. We define normal sets and normal applications N. We study the dual application of N and the functional $\Phi_N : N(u) = \phi_N(K(\,.\,,u))$. These properties make a link between "normal application" and the theory of interpolation.

Dans de récents travaux, Ph. Bénilan, M. G. Crandall et A. Pazy [1] ont été amenés à étudier les opérateurs vérifiant des propriétés d'accrétivité dans tous les espaces L^p.

Plus précisément, soient (Ω,μ) un espace mesuré muni d'une mesure σ-finie non négative, $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'espace des applications μ-mesurables à valeurs dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ (resp. $\mathcal{M}_f(\Omega)=\{u\in\mathcal{M}(\Omega)\mid u<+\infty \text{ p.p.}\}$), et $J_0=\{j:\mathbf{R}\to[0,+\infty]\mid \text{convexe, s.c.i.}, j(0)=0\}$.

Si A est une multiapplication définie sur $\mathcal{M}_f(\Omega)$, A est dite *complètement accrétive* [1] si:

$$\int_\Omega j(u_1-u_2)d\mu \leqq \int_\Omega j(u_1-u_2+\lambda(v_1-v_2))d\mu,$$

$$\forall\, v_i\in A(u_i)\,,\quad i=1,2;\quad \lambda\geqq 0;\quad j\in J_0.$$

Ils étudient la classe de ces opérateurs complètement accrétifs et en particulier les properiétés de perturbations additives et multiplicatives par des graphes

Received July 15, 1984 and in revised form March 19, 1987

maximaux monotones. Pour cela ils ont été amenés à considérer les sous-espaces X de $\mathcal{M}_f(\Omega)$ pour lesquels A complètement accrétive entraîne A_X (A restreinte à X) est accrétive dans X. Ceci les a conduit à définir des *normes normales* sur $\mathcal{M}(\Omega)$.

Ils considèrent des sous-espace vectoriels normés X de $\mathcal{M}(\Omega)$, stables pour la relation d'ordre associée à J_0^e:

$$J_0^e = \{j \in J_0 \,|\, j \text{ paire}\},$$

$$u \underset{J_0^e}{<} v \left(\int_\Omega j(u)d\mu \leqq \int_\Omega j(v)d\mu \quad \forall j \in J_0^e \right), \qquad v \in X \Rightarrow u \in X,$$

et dont la norme est dite "normale" si elle vérifie de plus

$$\| u \|_X \leqq \| v \|_X.$$

On rappelle que cette relation d'ordre est équivalente à $K(t, u) \leqq K(t, v)$ $\forall t > 0$ où

$$K(t, u) = \operatorname*{Inf}_{w \in L^\infty(\Omega)} \left(\int_\Omega |u(x) - w(x)| \, d\mu + t \| w \|_\infty \right),$$

on notera alors $u < v$.

On s'intéresse à des applications normales N, plus générales que des normes, auxquelles, à tout sous-ensemble F de $X_1 = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) \,|\, 0 < N(u) < +\infty\}$ on associe l'application duale:

$$u \in \mathcal{M}(\Omega) \to N_F^*(u) = \sup_{v \in F} \frac{1}{N(v)} \int_\Omega |u(x)v(x)| \, d\mu.$$

On montre alors que si $F \cup \{0\}$ est une "partie normale" (définition I.1) N_F^* est une semi-norme qui vérifie la propriété de Fatou [1] [9]. Puis on montre qu'à N on peut associer une fonctionnelle Φ_N telle que $\forall u \in \mathcal{M}(\Omega)$ $N(u) = \Phi_N(K(\,.\,, u))$. Ce qui met en évidence un lien entre les "parties normales" et la théorie de l'interpolation. On compare alors les propriétés algébriques de N et Φ_N, dont l'une est liée à la notion de K-divisibilité [2] [5] (proposition I.3).

I. Application normale, application duale

I. *Parties normales*

Tout au long de ce travail, on envisage un espace mesuré (Ω, μ) muni d'une mesure σ-finie non atomique [5].

NOTATIONS I. 1

1. $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'ensemble des applications μ-mesurables, $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ les espaces de Lebesgue classiques.

2. Ph. Bénilan, M. G. Crandall et A. Pazy [1] introduisent l'ensemble suivant:

$$J_0^e = \{j : \mathbf{R} \to [0, +\infty] \mid j \text{ convexe, s.c.i., paire, } j(0) = 0\}.$$

3. Soit u un élément de $\mathcal{M}(\Omega)$, on lui associe:

$$K : t \in]0, +\infty[\to K(t, u) = \inf_{v \in L^\infty(\Omega)} \left[\int_\Omega |u - v| \, d\mu + t \, \| v \|_\infty \right]$$

$$= \inf_{k > 0} \left[\int_\Omega (|u| - k)^+ d\mu + tk \right]$$

où v^+ désigne l'application:

$$x \in \Omega \to v^+(x) = \begin{cases} v(x) & \text{si } v > 0, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

On donne une démonstration d'un résultat connu depuis longtemps dans le cas d'une variable discrète ([8], [11]), et utilisé dans le cas d'une variable continue, sans qu'il soit facile d'en trouver une référence.

PROPOSITION I. 1. *Quels que soient u et v de $\mathcal{M}(\Omega)$, on a équivalence entre les deux propriétés suivantes*:

(i) $\forall j \in J_0^e \ \int_\Omega j(u) d\mu \leqq \int_\Omega j(v) d\mu$,

(ii) $K(t, u) \leqq K(t, v) \ \forall t > 0$.

Avant de faire la démonstration, on fait les rappels suivants:

1. Si $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, on lui associe [3]:

sa fonction distribution:

$$\sigma \in]0, \infty[\rightarrow D(u, \sigma) = \mu\{x \in \Omega \mid |u(x)| > \sigma\},$$

sa fonction réarrangement:

$$t \in]0, \infty[\rightarrow u^*(t) = \inf\{\sigma \mid D(u, \sigma) \leqq t\},$$

u^* est non croissante, continue à droite.

De plus, la fonction réarrangement vérifie les properiétés suivantes:

(a) $\forall E \subset \Omega$, E mesurable, $\mu(E) \leqq t$, $0 < t < +\infty$,

$$\int_\Omega |u(x)| \chi_E d\mu \leqq \int_0^t u^*(s) ds,$$

où χ_E désigne la fonction caractéristique de l'ensemble E; la mesure μ étant non atomique, on a:

$$\forall 0 < t < \mu(\Omega) \ \exists E_t \text{ mesurable avec } \mu(E_t) = t,$$

$$\int_\Omega |u(x)| \chi_{E_t} dt = \int_0^t u^*(s) ds.$$

(b) $\forall u, v \in \mathscr{M}(\Omega)$ on a:

$$\int_\Omega |u(x)| \, |v(x)| \, d\mu \leqq \int_0^\infty u^*(s) v^*(s) ds.$$

(c) $K(t, u) = \int_0^t u^*(s) ds$, cette quantité étant finie si $u \in L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$.

2. On a l'équivalence entre les deux propriétés suivantes [1], pour tout $u, v \in \mathscr{M}(\Omega)$:

(i) $\forall j \in J_0^e \ \int_\Omega j(u) d\mu \leqq \int_\Omega j(v) d\mu$,

(ii) $\forall k > 0 \ \int_\Omega [|u(x)| - k]^+ d\mu \leqq \int_\Omega [|v(x)| - k]^+ d\mu$.

Démonstration de la Proposition I. 1

1. Soient u et v vérifiant:

$$\forall j \in J_0^e \quad \int_\Omega j(u) d\mu \leqq \int_\Omega j(v) d\mu;$$

soit

$$\int_\Omega (|u(x)| - k)^+ d\mu \leqq \int_\Omega (|v(x)| - k)^+ d\mu \qquad \forall k > 0,$$

d'où on déduit $K(t, u) \leqq K(t, v) \ \forall t > 0$.

2. Soient u et v vérifiant $K(t, u) \leqq K(t, v)$ $\forall t > 0$, pour montrer qu'on a (i) il suffit d'établir (rappel 2),

$$\int_\Omega (|u(x)| - k)^+ d\mu \leqq \int_\Omega (|v(x)| - k)^+ d\mu \qquad \forall k > 0.$$

Des propriétés des fonctions distribution et réarrangement, on déduit les égalités suivantes:

$$\int_\Omega (|u(x)| - k)^+ d\mu = \int_0^\infty (u^*(s) - k)^+ ds = \int_0^{D(u^*,k)} (u^*(s) - k) ds.$$

Il suffit alors d'établir les inégalités:

$$(1) \qquad \int_0^{D(u^*,k)} (u^*(s) - k) ds \leqq \int_0^{D(v^*,k)} (v^*(s) - k) ds \qquad \forall k > 0.$$

L'inégalité (1) est immédiate si on a $D(u^*, k) \leqq D(v^*, k)$.

Si $D(u^*, k) > D(v^*, k)$ on aura $\int_{D(v^*,k)}^{D(u^*,k)} (v^*(s) - k) \leqq 0$ ce qui entraîne également (1).

Notation I. 2. Si u et v appartenant à $\mathcal{M}(\Omega)$ vérifient l'équivalence de la proposition I. 1., on note

$$u < v.$$

Définition I. 1. [1]

1. On appelle *partie normale* tout sous-ensemble X de $\mathcal{M}(\Omega)$ vérifiant:

$$\forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega) \qquad u < v \quad \text{et} \quad v \in X \Rightarrow u \in X.$$

2. On appelle *application normale* toute application N de $\mathcal{M}(\Omega)$ dans $\bar{\mathbf{R}}$ vérifiant:

$$\forall k \in \mathbf{R} \qquad X_k = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) \mid N(u) \leqq k\}, \qquad X_k \text{ est normale;}$$

ceci équivaut à:

$$\forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega) \qquad u < v \Rightarrow N(u) \leqq N(v).$$

3. On appelle *espace vectoriel normé normal* tout sous-espace vectoriel X de $\mathcal{M}(\Omega)$ qui est une partie normale, et qui est tel que, si $\|\,.\,\|$ désigne la norme de X, l'application:

$$N : u \in \mathcal{M}(\Omega) \to N(u) = \begin{cases} \| u \| & \text{si } u \in X \\ + \infty & \text{si } u \notin X \end{cases}$$

est une application normale.

II. *Application duale*

DÉFINITION I. 2. Soient N une application normale de $\mathcal{M}(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$, F un sous-ensemble de $X_1 = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) \mid 0 < N(u) < +\infty\}$. On applle *application duale associée* à F et on note N_F^*:

$$u \in \mathcal{M}(\Omega) \to N_F^*(u) = \sup_{v \in F} \frac{1}{N(v)} \int_\Omega | u(x) v(x) | \, d\mu.$$

REMARQUE I. 1

1. N_F^* est une semi-norme, elle est une norme si et seulement si:

$$\int_\Omega | u(x) v(x) | \, d\mu = 0 \qquad \forall v \in F \Rightarrow u = 0 \quad \text{p.p.}$$

2. Toute application duale vérifie la propriété de Fatou [1] [9]; plus précisément: soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{M}(\Omega)$, $u_n \geqq 0$ alors

$$N_F^*(\liminf u_n) \leqq \liminf N_F^*(u_n).$$

En particulier les semi-boules fermées seront fermées pour la convergence presque partout.

Le résultat suivant est dû essentiellement à Luxemburg [10] (p. 115, théorème 11.7) et la preuve que nous donnons ici suit de près ses idées:

THÉORÈME I. 1. *Soient N une application normale, F un sous-ensemble de $X_1 = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) \mid 0 < N(u) < +\infty\}$, tel que $F \cup \{0\}$ soit une partie normale; alors N_F^* est une semi-norme normale.*

DÉMONSTRATION. Soient $u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$ avec $u < v$. On veut montrer $N_F^*(u) \leqq N_F^*(v)$. Comme la mesure sur Ω est non atomique, quelle que soit ω, fonction simple sur Ω, il existe des fonctions simples ω_u et ω_v ayant même fonction réarrangement que ω et vérifiant

$$\int_\Omega | u(x) | \, \omega_u(x) d\mu = \int_0^\infty u^*(s) \omega^*(s) ds$$

ainsi que

$$\int_\Omega |v(x)|\,\omega_v(x)d\mu = \int_0^\infty v^*(s)\omega^*(s)ds.$$

Comme ω^* peut s'écrire $\omega^*(s) = \Sigma_{k=1}^{\ell} \alpha_k \chi_{[0,\beta_k[}$ α_k, β_k réels positifs, et comme $\int_0^t u^*(s)ds \leqq \int_0^t v^*(s)ds$ (proposition I. 1), on obtient

$$\int_\Omega |u(x)|\,\omega_u(x)d\mu \leqq \int_\Omega |v(x)|\,\omega_v(x)dx.$$

Puis en utilisant la propriété (b) rappelée plus haut, on en déduit:

$$\int_\Omega |u(x)\omega(x)|\,d\mu \leqq N_F^*(v)N(\omega)$$

pour toute fonction simple ω.

Un argument simple d'approximation étend ce résultat à tout ω de F.

Remarque I. 2

1. En suivant Lindenstrauss et Tzafriri [9] (p. 115) on remarque que l'étude des espaces de fonctions invariantes par réarrangement sur un espace mesuré séparable (Ω, μ), ici non atomique, se réduit à considérer $\Omega = [0, 1]$ ou $[0, \infty[$, munis de la mesure de Lebesgue. On dira alors que X sous-espace de $\mathcal{M}(\Omega)$ est invariant par réarrangement [9] (p. 118) si c'est un espace de Köthe vérifiant:

(i) $\forall u \in X$, $\forall \tau$ automorphisme bijectif bimesurable de Ω dans Ω conservant la mesure, alors $u \circ \tau \in X$ et $\| u \circ \tau \|_X = \| u \|_X$.

(ii) X' est un sous-espace normé de X^* et ainsi X est ordre-isométrique à un sous-espace de X''. En tant que sous-espace de X'', X est soit maximal ($X = X''$) soit minimal (l'enveloppe linéaire fermée dans X'' des fonctions simples).

(iii) Si $\Omega = [0, 1]$ on a l'inclusion algébrique et topologique $L^\infty(0, 1) \hookrightarrow X \hookrightarrow L^1(0, 1)$, de normes 1.

Si $\Omega = [0, \infty[$ on a l'inclusion:

$$L^\infty(0, \infty) \cap L^1(0, \infty) \subset X \subset L^\infty(0, \infty) + L^1(0, \infty)$$

avec $\forall u \in L^\infty \cap L^1$ $\| u \|_X \leqq \mathrm{Max}(\| u \|_1, \| u \|_\infty)$ et

$$\forall u \in X \qquad \int_0^1 u^*(s)ds \leqq \| u \|_X.$$

On peut alors montrer en se servant d'un argument utilisé par Calderon (démonstration du théorème I, p. 278 [4]) que si les boules de X sont fermées pour la convergence presque partout, il y a équivalence entre X est un espace vectoriel normé normal et X est invariant par réarrangement (on peut même se contenter d'une semi-norme).

2. Toute application duale vérifiant la propriété de Fatou (remarque I. 1. 2) on aura équivalence entre la semi-norme duale est normale et l'espace associé est invariant par réarrangement.

II. Application normale, fonctionnelle associee

I. *Fonctionnelles*

On vient de comparer une propriété de croissance associée à l'ensemble J_0^ε [1], et une propriété de croissance associée à la fonction K qui joue un rôle important en interpolation. On adapte alors aux espaces qui nous intéressent un résultat mis en évidence par Cwickel et Peetre [6].

Définition II. 1. On appelle *fonctionnelle* toute application de $\mathcal{M}^+(0, \infty)$ dans $\bar{\mathbf{R}}$, qui est de plus croissante:

$$u \leqq v \quad \text{p.p.} \quad \Phi(u) \leqq \Phi(v)$$

Remarque II. 1. Soit Φ une fonctionnelle. Alors l'application:

$$u \in \mathcal{M}(\Omega) \rightarrow \Phi(K(\,.\,, u))$$

est une application norm ale (définition I. 1).

Notation II. 1. Soit N une application de $\mathcal{M}(\Omega)$ dans $\bar{\mathbf{R}}$.
On lui associe une fonction notée Φ_N par:

$$\Phi_N : \varphi \in \mathcal{M}^+(0, \infty) \rightarrow \Phi_N(\varphi) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{M}(\Omega) \\ \varphi(t) \leqq K(t, u) \text{ p.p.}}} N(u).$$

On remarque que Φ_N est une fonctionnelle.

Proposition II. 1. *Soit N une application de $\mathcal{M}(\Omega)$ dans $\bar{\mathbf{R}}$. Alors N est normale si et seulement si la fonctionnelle Φ_N vérifie*:

$$\forall\, u \in \mathcal{M}(\Omega) \qquad N(u) = \Phi_N(K(\,.\,, u)).$$

Ce résultat est une conséquence de la proposition I. 1; on remarque de plus que Φ_N est la plus grande fonctionnelle Φ vérifiant:

$$N(u) = \Phi(K(\,.\,, u)) \quad \forall u.$$

II. *Comparaison des propriétés d'une application normale et de la fonctionnelle associée*

Définition II. 2

1. On appelle jauge (resp., semi-norme, norme) sur $\mathcal{M}(\Omega)$ toute application $N: \mathcal{M}(\Omega) \to [0, +\infty]$ propre

$$X_N = D(N) = \{u \mid N(u) < +\infty\} \neq \Phi$$

vérifiant:

(a) $N(\lambda u) = \lambda N(u) \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall u \in \mathcal{M}(\Omega)$,
(b) respectivement $N(u + v) \leqq N(u) + N(v) \quad \forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$,
(c) respectivement $N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$ p.p.

2. On appelle jauge (resp. semi-norme, norme) fonctionnelle, toute fonctionnelle $\Phi : \varphi \in \mathcal{M}(0, \infty) \to \Phi(\varphi) = \Phi(|\varphi|) \in [0, +\infty]$, telle que Φ soit une jauge (resp. semi-norme, norme).

Remarques II. 2

1. Si N est une jauge, alors $N(0) = 0$.
2. Soit N une jauge normale non identique à 0, alors Ph. Bénilan, M. G. Crandall et A. Pazy ont montré [1] que X_N est un sous-ensemble de $L^1(\Omega) + L^\infty(\Omega)$.
3. Soit Φ une jauge (rsp. semi-norme, norme) fonctionnelle.
Alors l'application N:

$$u \in \mathcal{M}(\Omega) \to N(u) = \Phi(K(\,.\,, u))$$

est une jauge (resp. semi-norme, norme), normale.
4. Si N est une jauge, alors Φ_N est une jauge fonctionnelle.

Proposition II. 2. *Soit N une semi-norme sur $\mathcal{M}(\Omega)$. Alors la fonctionnelle Φ_N est une semi-norme.*

Démonstration de la Proposition II. 2

1. Soit N une application de $\mathcal{M}(\Omega)$ dans $[0, +\infty]$. Pour que l'application Φ_N vérifie l'inégalité triangulaire, il suffit que (remarque II.2 [6]): $\forall u, v \in \mathcal{M}(\Omega)$ il existe u_1, v_1 vérifiant:

$$K(t, u) = K(t, u_1), \quad K(t, v) = K(t, v_1)$$

et

$$K(t, u_1 + v_1) = K(t, u_1) + K(t, v_1) \quad \forall t > 0.$$

Comme $K(t, v) = K(t, v^*)$ $\forall t > 0$, pour tout $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, et come $v = v^*$, si v est une application de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathbf{R}^+$ non croissante continue à droite, le résultat sera vérifié si on est sur $\mathcal{M}^+([0, +\infty[\,)$.

2. De (1) on déduit qu'on est ramené au problème suivant: étant donné $v \in \mathcal{M}^+(\,]0, \infty[\,)$ non croissante, continue à droite, existe-t-il $g \in \mathcal{M}(\Omega)$ vérifiant $g^* = v$, la construction de g étant "intrinsèque"?

La mesure μ étant non atomique pour tout sous-ensemble mesurable E de Ω, $\forall \alpha$, $0 < \alpha < \mu(E)$, il existe un ensemble $E_\alpha \subset E$ vérifiant $\mu(E_\alpha) = \alpha$ [12]. On utilise alors une idée de Lindenstrauss et Tzafriri [9] envisagée pour $\Omega = \,]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue.

Plus précisément: $\forall n \in \mathbf{N}^*$ on décompose $]0, \infty[$ en partition de la forme:

$$\sigma_{j,n} = \left[\frac{j-1}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right[, \qquad j \in \mathbf{N}^*.$$

Alors il existe des sous-ensembles mesurables de Ω, $(\Omega_{j,n})_{j,n \in \mathbf{N}^*}$ vérifiant:

$$\mu(\Omega_{j,n}) = \frac{1}{2^{n-1}},$$

les ensembles étant "emboîtés" de la façon suivante: si

$$\frac{j-1}{2^n} = \frac{k-1}{2^{n+1}} < \frac{k}{2^{n+1}} < \frac{k+1}{2^{n+1}} = \frac{j}{2^n},$$

$\Omega_{k,n+1}$ et $\Omega_{k+1,n+1}$ forment une partition de $\Omega_{j,n}$.

La fonction v étant donnée, on note D l'ensemble, au plus dénombrable, de points de discontinuité de v.

A tout $n \in \mathbf{N}^*$, on associe v_n:

$$t \in \,]0, \infty[\, \to v_n(t) = 2^n \int_{\sigma_{j,n}} v(s)\,ds \quad \text{si } t \in \sigma_{j,n};$$

alors $\lim_{n \to +\infty} v_n(t) = v(t)$ $\forall t \in \,]0, \infty[\, - D$ [9], à v_n on associe g_n:

$$x \in \Omega \to g_n(x) = \begin{cases} v_n(t) & \text{si } x \in \Omega_{j,n}, \quad t \in \sigma_{j,n}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathrm{C}_\Omega(\bigcup \Omega_{j,n}). \end{cases}$$

Alors $g = \lim_{n \to +\infty} g_n$ p.p. et $g^* = v$.

REMARQUE II. 3. Le fait qu'il existe u_1 et v_1 vérifiant les propriétés requises plus haut est lié à la notion de K-divisibilité étudiée par Brudnyi et Krugljak [2] et Cwickel [5]. En effet, si l'on remplace les espaces $L^1(\Omega)$ et $L^\infty(\Omega)$ par un couple compatible arbitraire d'espaces de Banach et si l'on définit judicieusement la K-fonctionnelle $K(\,.\,, u)$ dans ces espaces, une forme plus faible du résultat précédent est encore valable et admet des conséquences importantes dans la théorie de l'interpolation.

PROPOSITION II. 3. *Si N est une norme normale sur $\mathcal{M}(\Omega)$, alors Φ_N est une norme.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II. 3. Soit φ de $]0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ non identique à 0 p.p.; alors il existe $s > 0$ avec $\varphi(s) = a > 0$ et toutes les fonctions u sur lesquelles on doit prendre l'inf (notation II. 1) doivent vérifier

$$a \leqq K(s, u). \tag{1}$$

Sans restreindre la généralité, on peut supposer $s < \mu(\Omega)$. Soit alors E un sous-ensemble de Ω de mesure s et $v = (a/s)\chi_E$, on a

$$K(t, v) = \frac{a}{s} \min(t, s).$$

D'où toute fonction vérifiant (1) vérifiera $K(t, v) \leqq K(t, u) \quad \forall t > 0$; d'où $N(u) \geqq N(v)$ et on aura $\Phi_N(\varphi) \geqq N(v) > 0$.

REMARQUES II. 4

1. Si X est un espace vectoriel normé normal de norme $\|\,.\,\|$, alors il existe une jauge fonctionnelle Φ telle que:

$$\forall u \in X \quad \| u \| = \Phi(K(\,.\,, u)).$$

2. Soit X un espace vectoriel normé normal non réduit à $\{0\}$, alors $L^\infty_{00} \subset X$ où $L^\infty_{00} = \{u \in L^\infty(\Omega) \mid \mu(\operatorname{supp} u) < +\infty\}$.

X étant un espace normal non réduit à $\{0\}$, il existe un sous-ensemble mesurable E de Ω, $0 < \mu(E) = \alpha < +\infty$, tel que $\chi_E \subset X$. On va en déduire que pour tout sous-ensemble mesurable F, $0 < \mu(F) = \beta < \mu(\Omega)$, χ_F appartient à X, ce qui entraînera le résultat souhaité. Comme

$$\int_\Omega [a\,|\chi_E| - k]^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leqq k \\ (a-k)\mu(E) & \text{si } k < a \end{cases}$$

on a

$$\inf\left(1, \frac{\mu(E)}{\mu(F)}\right)\chi_F < \chi_E,$$

et X étant un epace vectoriel normal, $\chi_F \in X$.

On déduit du théorème I. 1. le corollaire suivant:

COROLLAIRE II. 1. *Soient N une norme normale, $X_N = \{u \in \mathcal{M}(\Omega) \mid N(u) < +\infty\}$ l'espace vectoriel normé associé; si $X_N \neq \{0\}$ alors $N^*_{X_N}$ est une norme normale et de plus $N^*_{X_N} = N^*_{X_N \cap L^\infty_\infty}$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Ph. Benilan, M. G., Crandall and A. Pazy, *Nonlinear Evolution Equations Governed by Accretive Operators* (livre en préparation).

2. Ju. A. Brudnyi and N. Ja. Krugljak, *Real interpolation functors*, Soviet Math. Doklady **23** (1981), 5–8.

3. P. L. Butzer and H. Berens, *Semi-groups of Operators and Approximation*, Springer-Verlag, 1967.

4. A. P. Calderon, *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcienkiewicz*, Studia Math. **26** (1966), 273–299.

5. M. Cwickel, *K-divisibility of the K-functional and Calderon couples*, Ark. Mat. **2** (1984), 39–62.

6. M. Cwickel and J. Peetre, *Abstract K- and J-spaces*, J. Math. Pures Appl. **60** (1981), 1–50.

7. P. R. Halmos, *Measure Theory*, Van Norstand, 1950.

8. G. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1959.

9. J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Springer-Verlag, 1979.

10. W. A. J. Luxemburg, *Rearrangement invariant Banach function spaces*, Proc. Symp. Anal., Queen's University **10** (1967), 83–144.

11. A. W. Marshall and I. Olkin, *Inequalities: Thoery of Majorization and its Applications*, Academic Press, 1979.

12. J. Neveu, *Calcul des probabilités*, Masson, 1964.